

二阶非自治 (q, p) -Laplace 方程组解的存在性*

崔德标

(河海大学理学院, 江苏 南京 211100)

摘要: 主要讨论了二阶非自治 (q, p) -Laplace 方程组解的存在性。借助一个新的条件, 可以说明二阶非自治 (q, p) -Laplace 方程组相应的泛函满足 PS 条件, 得到二阶非自治 (q, p) -Laplace 方程组解的一些存在性定理, 最后借助鞍点定理给予证明。

关键词: PS 条件; 鞍点定理; 次凸的; 惟一解

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2013) 03-0045-04

Existence of Solution of Second-order Nonautonomous Equations with (q, p) -Laplacian

CUI Debiao

(College of science Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: The existence of solution of second-order nonautonomous equations with (q, p) -Laplacian is discussed. Under the new condition, it is well known that second-order nonautonomous equations with (q, p) -Laplacian corresponds to functional satisfies PS condition. Some existence theorems of unique solution of second-order nonautonomous equations with (q, p) -Laplacian are obtained by using the saddle point theorem.

Key words: PS condition; saddle point theorem; second-convex; unique solution

本文讨论二阶非自治 (q, p) -Laplace 方程组

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}(|\dot{u}_1(t)|^{q-2}u_1(t)) = \\ \quad \nabla_{u_1}F(t, u_1(t), u_2(t)), \\ -\frac{d}{dt}(|\dot{u}_2(t)|^{p-2}u_2(t)) = \\ \quad \nabla_{u_2}F(t, u_1(t), u_2(t)), \\ u_1(0) = u_1(T), \dot{u}_1(0) = \dot{u}_1(T), \\ u_2(0) = u_2(T), \dot{u}_2(0) = \dot{u}_2(T) \end{cases} \quad \text{a. e. } t \in [0, T] \quad (1)$$

解的存在性。这里 $T > 0, 1 < q, p < \infty, F: [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 。当 $p, q = 2$ 时, (1) 是二阶哈密顿系统。利用变分的方法, 已经获得了一些存在性结果, 见文 [1-9]。例如, 利用变分方法中的极小值原理, 文 [1] 得到了一个存在性结果; 文 [2]

在非线性边界条件下, 利用极小值原理和山路引理获得了两个存在性结果; 文 [3] 利用非光滑临界点定理得到了两个存在性结果; 当非线性项 $\nabla F(t, x)$ 有界时, 得到了一个多解性结论, 见文 [4]。当 $p = 2$ 时, 在文 [5] 中, 当非线性条件 $\nabla F(t, x)$ 在 Rabinowitz 条件下满足次二次性, 得到了一些存在性结果。受文 [5] 的启发, 本文概括一个新的条件: 存在 $0 < \mu_1 < q, 0 < \mu_2 < p$ 和 $M > 0$ 满足

$$\begin{cases} \nabla_{x_1}F(t, x_1, x_2) \leq \mu_1 F(t, x_1, x_2), \\ \nabla_{x_2}F(t, x_1, x_2) \leq \mu_2 F(t, x_1, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

对所有的 $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq M$ 和对 a. e. $t \in [0, T]$ 成立。

* 收稿日期: 2012-10-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171090); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目 (NCET-10-0325)

作者简介: 崔德标 (1985 年生), 男, 博士生; E-mail: cuidebiao2006@163.com

在条件 (2) 下, 可以说明方程组 (1) 相应的泛函满足 PS 条件. 本文借助鞍点定理可以得到方程组 (1) 的一些存在性定理, 然后给予证明, 详见第二部分主要结果.

1 预备知识

下面引入一些基本的记号与概念, $W_T^{1,p}$ 是 Sobolev 空间

$W_T^{1,p} = \{u: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^n \mid u, \dot{u} \in L^p([0, T], \mathbf{R}^n)\}$
 令 $u \in W_T^{1,p}$, 设 $u(t) = \bar{u}(t) + \dot{u}(t)$ 且满足 $\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \int_0^T \dot{u}(t) dt = 0$, 则对于 $u \in W_T^{1,p}, v \in W_T^{1,q}$, 则有 Sobolev 不等式

$$\|\dot{u}\|_\infty \leq C_1 \|\dot{u}\|_p, \|\dot{v}\|_\infty \leq C_1 \|\dot{v}\|_q$$

和 Wirtinger 不等式

$$\|\dot{u}\|_p \leq C_2 \|\dot{u}\|_p, \|\dot{v}\|_q \leq C_1 \|\dot{v}\|_q$$

其中 C_1, C_2 是正的常数. $F: [0, T] \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 满足下面的假设:

假设 (A) $F(t, x_1, x_2)$ 关于 t 对于每一个 $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 是可测的, 且关于 (x_1, x_2) 对 a. e. $t \in [0, T]$ 是连续可微的, 则存在 $a_1, a_2 \in C(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+), b \in L^1(0, T, \mathbf{R}^+)$ 使得

$$|F(t, x_1, x_2)| + |\nabla_{x_1} F(t, x_1, x_2)| + |\nabla_{x_2} F(t, x_1, x_2)| \leq (a_1(|x_1|) + a_2(|x_2|))b(t)$$

成立, 其中 $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 和 a. e. $t \in [0, T]$.

记 $W = W_T^{1,p} \times W_T^{1,q}$ 是自反的 Banach 空间, 其范数记为

$$\|(u_1, u_2)\|_W = \|u_1\|_{W_T^{1,q}} + \|u_2\|_{W_T^{1,p}}$$

则方程组 (1) 相应的泛函方程可以表达为

$$\varphi(u_1, u_2) = \frac{1}{q} \int_0^T |\dot{u}_1(t)|^q dt + \frac{1}{p} \int_0^T |\dot{u}_2(t)|^p dt - \int_0^T F(t, u_1(t), u_2(t)) dt \quad (3)$$

本文假设 $F = F_1 + F_2, F_1, F_2$ 满足假设 (A).

定义 1 (次凸性) 若

$$G(\lambda(x+y)) \leq \mu(G(x) + G(y))$$

对一些 $\lambda, \mu > 0$ 和 $x, y \in \mathbf{R}^N$ 成立, 则泛函 $G: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ 被称作 (λ, μ) 次凸的.

定义 2^[7] (PS 条件) X 是一个 Banach 空间, f 是其上的泛函, $\{u_n\} \subset X$, 如果 $\{f(u_n)\}$ 有界, 并且在 X^* 上 $f'(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, 则 $\{u_n\}$ 有强收敛子列.

引理 1^[8] (鞍点定理) 设 X 是一个 Banach 空间, $\varphi \in C^1(X, \mathbf{R}^1)$, φ 满足 (PS) 条件, 将 X 直

和分解为 $X = X_1 \oplus X_2, \dim X_1 < \infty$. 若存在 $R > 0$, 使得

$$\sup_{u \in S_R^-} \varphi(u) < \inf_{u \in X^+} \varphi(u)$$

成立, 其中 $S_R^- = \{u \in X^- \mid \|u\| = R\}$, 则 φ 必有临界点.

2 主要结果

定理 1 假设 F 满足假设 (A) 和条件 (2), 存在 $g \in L^1(0, T)$ 使得

$$F(t, x_1, x_2) \geq g(t) \quad (4)$$

对所有的 $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 和 a. e. $t \in [0, T]$ 成立. 在 $[0, T]$ 上存在一个子列 E 且有 $\text{meas}(E) > 0$, 使得

$$F(t, x_1, x_2) \rightarrow +\infty \quad (5)$$

其中 a. e. $t \in E$, 则 (1) 在 W 上有惟一解.

证明 记 $E = W = W_T^{1,q} \times W_T^{1,p}$ 和

$$\tilde{W} = \tilde{W}_T^{1,q} \times \tilde{W}_T^{1,p} = \{(u_1, u_2) \in W_T^{1,q} \times W_T^{1,p} \mid (\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0\}$$

则 $E = \tilde{W}_T^{1,q} \times \tilde{W}_T^{1,p} + \mathbf{R}^N$ 且 \mathbf{R}^N 是有限维的. 根据鞍点定理只需证明

① $\varphi(u_1, u_2) \rightarrow +\infty$, 当 $\|(u_1, u_2)\| \rightarrow \infty$ 在 $W_T^{1,q} \times W_T^{1,p}$ 上,

② $\varphi(u_1, u_2) \rightarrow -\infty$, 当 $\|(u_1, u_2)\| \rightarrow \infty$ 在 $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$.

对每一个 $|(x_1, x_2)| \geq M$ 和 a. e. $t \in [0, T]$, 记

$$y(s) = F(t, sx_1, sx_2), Q(s) = y'(s) - \frac{\mu}{s}y(s) \quad (6)$$

则

$$Q(s) = \frac{1}{s} [(\nabla F(t, sx_1, sx_2), sx_1, sx_2) - \mu F(t, sx_1, sx_2)] \leq 0 \quad (7)$$

对所有的 $s \geq \frac{M}{|x|}$. 由 (6) 得 $y(s) = F(t, sx_1, sx_2)$

是一阶线性常微分方程 $y'(s) = \frac{\mu}{s}y(s) + Q(s)$ 的一个解, 表明

$$F(t, sx_1, sx_2) = s^\mu \left(\int_1^s r^{-\mu} \theta(r) dr + F(t, x_1, x_2) \right)$$

其中 $s \geq \frac{M}{|x|}$. 此外, 通过假设 (A) 和式 (7)

知

$$a_0 b(t) \geq F(t, \frac{Mx_1}{|x|}, \frac{Mx_2}{|x|}) \geq \left(\frac{M}{|x|}\right)^\mu F(t, x_1, x_2)$$

其中 $|x| \geq M$, a. e. $t \in [0, T]$ 和一些常数 $a_0 =$

$\max_{|x| \leq M} a(|x|)$, 则

$$F(t, x_1, x_2) \leq a_0 b(t) \left(\left(\frac{|x|}{M} \right)^\mu + 1 \right)$$

对所有的 $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 和 a. e. $t \in [0, T]$ 。利用 Sobolev 不等式和 Wirtinger 不等式得

$$\varphi(u_1, u_2) \geq \frac{1}{q} \int_0^T |\dot{u}_1(t)|^q dt + \frac{1}{p} \int_0^T |\dot{u}_2(t)|^p dt -$$

$$\| (u_1, u_2) \|_\infty^\mu \left(\frac{a_0}{M^\mu} \right) \cdot \int_0^T b(t) dt - a_0 \int_0^T b(t) dt \geq$$

$$\frac{1}{2q} \min\{1, c^{-q}\} \| (u_1, u_2) \|_q^q +$$

$$\frac{1}{2p} \min\{1, c^{-p}\} \| (u_1, u_2) \|_p^p -$$

$$a_0 \left(\frac{c}{M} \right)^\mu \int_0^T b(t) dt \| (u_1, u_2) \|^\mu - a_0 \int_0^T b(t) dt$$

对所有的 $(u_1, u_2) \in \tilde{W}_T^{1,q} \times \tilde{W}_T^{1,p}$, 则①得证。由式 (4) 和式 (5) 得

$$\varphi(x_1, x_2) = - \int_0^T F(t, x_1, x_2) dt \leq$$

$$- \int_E F(t, x_1, x_2) dt - \int_{[0,T] \setminus E} g(t) dt \leq$$

$$- \int_E F(t, x_1, x_2) dt + \int_0^T |g(t)| dt \rightarrow -\infty$$

则②得证。由鞍点定理易知定理 1 成立。

定理 2 假设 F 满足假设 (A), 条件 (2) 和

$$\int_0^T F(t, x_1, x_2) dt \rightarrow \infty, \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty \quad (8)$$

假设 $F(t, \cdot, \cdot)$ 是 (β, γ) -次凸的且 $\gamma > 0$ 对 a. e. $t \in [0, \|T\|]$, 即

$$F(t, \beta_1(x_1 + y_1), \beta_2(x_2 + y_2)) \leq \gamma_1 F(t, x_1, x_2) + \gamma_2 F(t, y_1, y_2) \quad (9)$$

对所有的 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$, 则问题 (1) 有惟一解。

证明 记 $\{(u_{1n}, u_{2n})\}$ 是 $W = W_T^{1,q} \times W_T^{1,p}$ 上一个子列且 $\varphi(u_{1n}, u_{2n})$ 有界, 且

$$\| \varphi'(u_{1n}, u_{2n}) \| \times (1 + \| (u_{1n}, u_{2n}) \|) \rightarrow 0$$

当 $n \rightarrow \infty$, 则存在一个常数 C_1 使得

$$| \varphi(u_{1n}, u_{2n}) | \leq C_1, \| \varphi'(u_{1n}, u_{2n}) \| \times (1 + \| (u_{1n}, u_{2n}) \|) \leq C_1 \quad (10)$$

其中 $n \in \mathbf{N}$ 。设

$$h(t) = (p + M)b(t) \max_{|x| \leq M} a(|x|) \geq 0$$

则由假设 (A) 和条件 (2) 得

$$-h(t) + (\nabla F(t, x_1, x_2), x_1 + x_2) \leq \mu F(t, x_1, x_2) \quad (11)$$

其中 $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 和 a. e. $t \in [0, T]$ 。又由于

$$(p + 1)C_1 \geq \varphi'(u_{1n}, u_{2n})(1 + (u_{1n}, u_{2n})) - p\varphi(u_{1n}, u_{2n}) \geq$$

$$[\varphi'(u_{1n}, u_{2n}), u_{1n} + u_{2n}] - p\varphi(u_{1n}, u_{2n}) = \int_0^T [pF(t, u_{1n}, u_{2n}) - (\nabla F(t, u_{1n}, u_{2n}), u_{1n} + u_{2n})] dt \geq$$

$$(p - \mu) \int_0^T F(t, u_{1n}, u_{2n}) dt - \int_0^T h(t) dt$$

对所有的 $n \in \mathbf{N}$, 这表明

$$\int_0^T F(t, u_{1n}, u_{2n}) dt \leq C_2 \quad (12)$$

其中 $n \in \mathbf{N}, C_2$ 是常数。根据式 (10) 和式 (12), 则

$$C_1 \geq \varphi(u_{1n}, u_{2n}) \geq \frac{1}{p} \int_0^T |\dot{u}_{2n}|^p dt + \frac{1}{q} \int_0^T |\dot{u}_{1n}|^q dt - C_2$$

其中 $n \in \mathbf{N}$, 则

$$\int_0^T |\dot{u}_{1n}|^q dt + \int_0^T |\dot{u}_{2n}|^p dt \leq C_3 \quad (13)$$

其中 $n \in \mathbf{N}, C_3$ 是常数。同理可得

$$\int_0^T |\dot{u}_{1n}|^q dt \leq C_4, \int_0^T |\dot{u}_{2n}|^p dt \leq C_5, \| \tilde{u}_{1n} \|_\infty \leq C_6 \quad (14)$$

其中 $n \in \mathbf{N}, C_4, C_5$ 和 C_6 是常数。则

$$C_2 \geq \int_0^T F(t, u_{1n}(t), u_{2n}(t)) dt \geq$$

$$\frac{1}{r} \int_0^T F(t, \beta_1 \bar{u}_{1n}, \beta_2 \bar{u}_{2n}) dt -$$

$$\int_0^T F(t, -\tilde{u}_{1n}(t), -\tilde{u}_{2n}(t)) dt \geq$$

$$\frac{1}{r} \int_0^T F(t, \beta_1 \bar{u}_{1n}, \beta_2 \bar{u}_{2n}) dt -$$

$$\max_{|x| \leq C_7} a(|x|) \int_0^T b(t) dt$$

其中 $n \in \mathbf{N}$, 所以 $\{(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n})\}$ 是有界的, 由式 (14) 得 $\{(u_{1n}, u_{2n})\}$ 是有界的。所以 $\{(u_{1n}, u_{2n})\}$ 有一个收敛子列, 因此, 泛函 φ 满足 (PS) 条件。

下面只需证明

③ $\varphi(u_1, u_2) \rightarrow +\infty$ 当 $\|u\| \rightarrow \infty$ 在 $\tilde{W} = \tilde{W}_T^{1,q} \times \tilde{W}_T^{1,p}$,

④ $\varphi(u_1, u_2) \rightarrow -\infty$ 当 $\|u\| \rightarrow \infty$ 在 $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ 。事实上, 利用和定理 1 相同的证明方法易知③成立, 而④直接由式 (8) 可以得到, 从而定理 2 得证。

参考文献:

[1] TIAN Y, GE W G. Periodic solutions of nonautonomous second-order systems with p -Laplacian [J]. Nonlinear Anal, 2007, 66: 192-203.

证明 由引理 6 和 Sobolev 嵌入定理 $W_p^{2,1}(\Omega_T)$

$$\subset \subset C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T), \alpha = 2 - \frac{5}{p} (p > \frac{5}{2}), \quad (\text{见文}$$

[9]), 则有

$$\|u\|_{C_{x,t}^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)} \leq C(T), \quad 0 < \alpha < 1$$

因此方程 (1), (4), (6), (9), (12) 的系数满足引理 2, 因此可得

$$\|u\|_{C_{x,t}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)} \leq C(T) \quad (57)$$

引理 7 得证

由定理 2 和引理 7, 可知定理 1 得证。

参考文献:

- [1] ANDASARI V, GERISCH A, LOLAS G, et al. Mathematical modeling of cancer cell invasion of tissue; biological insight from mathematical analysis and computational simulation [J]. *Math Biol*, 2011, 23: 141 – 171.
- [2] CHAPLAIN M A J, LOLAS G. Mathematical modeling of cancer invasion of tissue; the role of the urokinase plasminogen activation system [J]. *Math Mod Meth in Appl Sci*, 2005, 11: 1685 – 1734.
- [3] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

出版社, 2011.

- [4] CUI S. Analysis of a free boundary problem modeling tumor growth [J]. *Acta Math Appl Sin Engl Ser*, 2005, 21: 1071 – 1082.
- [5] LADYZENSKAJA O A, SOLONNIKOV V A, URAL' CEVA N N. Linear and quasilinear partial differential equations of parabolic type [M]. *Translations of Mathematical Monographs*, Am Math Soc, 1968, 23.
- [6] FRIEDEMANN A, LOLAS G. Analysis of a mathematical model of tumor lymphangiogenesis [J]. *Math Models Methods in Applied Sci*, 2005, 15: 95 – 107.
- [7] WEI X, CUI S. Existence and uniqueness of global solutions for a mathematical model of antiangiogenesis in tumor growth [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9: 1827 – 1836.
- [8] WEI X, GUO C. Global existence for a mathematical model of the immune response to cancer [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11: 3903 – 3911.
- [9] 王术. Sobolev 空间与偏微分方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.

(上接第 47 页)

- [2] JEBELEAN P, SANU G M. Ordinary p -Laplacian systems with nonlinear boundary conditions [J]. *Math Anal Appl*, 2006, 313 (2): 738 – 753.
- [3] FILIPPAKIS M, GASINSKI L, PAPAGEORGIOU N S. Periodic problems with asymmetric nonlinearities and nonsmooth potentials [J]. *Nonlinear Anal*, 2004, 58 (5 – 6): 683 – 702.
- [4] LV H SH, REGAN D O, AGARWAL R P. On the existence of multiple periodic solutions for the vector p -Laplacian critical point theory [J]. *Appl Math*, 2005, 50 (6): 555 – 568.
- [5] TANG CH L, WU X P. Notes on periodic solutions of subquadratic second order systems [J]. *Math Anal Appl*, 2003, 285 (1): 8 – 16.

- [6] RABINOWITZ P H. On subharmonic solutions of Hamiltonian systems [J]. *Pure Appl Math*, 1980, 33(5): 609 – 633.
- [7] PASCA D. Periodic solutions of second-order differential inclusions systems with p -Laplacian [J]. *Math Anal Appl*, 2007, 325 (1): 90 – 100.
- [8] MAWHIN J. Some boundary value problems for Hartman-type perturbations of the ordinary vector p -Laplacian [J]. *Nonlinear Anal*, 2000, 40 (1 – 8): 497 – 503.
- [9] LIU P, AN T Q, YAN K F. Existence of periodic solutions of nonautonomous second-order differential systems with (q,p) -Laplacian [J]. *Journal of Inner Mongolia University: Natural Science Edition*, 2011, 42(2): 121 – 126.